¿Por qué son *naturales* los logaritmos neperianos?

Isabel Fernández y José M. Pacheco
Departamento de Matemáticas
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

Abstract

Se hacen varias consideraciones acerca del origen calculístico de los logaritmos, así como sobre ciertas palabras, entre ellas "natural", empleadas en la jerga matemática. Con ellas se justifica el adjetivo natural, aplicado frecuentemente a los logaritmos neperianos, construyéndolos como solución de la ecuación funcional procedente de la idea básica del cálculo logarítmico, esto es, la existencia de una correspondencia entre dos progresiones, una geométrica y otra aritmética. Finalmente, se utiliza esta construcción para resolver el problema de valores iniciales para la ecuación diferencial lineal homogénea de primer orden $x' = x$.

1 Introducción

El cálculo logarítmico se desarrolló de manera simultánea, a finales del siglo XVI, en varios lugares de Europa. En Escocia, John Napier (1550-1617), contemporáneo de Cervantes y Shakespeare, además de construir la clase de logaritmos que lleva su nombre –Neper es una forma latinizada del apellido del escocés–, fue el primero en utilizar un punto para separar la parte entera de la mantisa en la representación de los números no enteros. En Suiza, Jost Bürgi (1552-1632) fue un relojero que descubrió una variante del cálculo con logaritmos, al parecer anteriores a los naturales. El otro fundador de la teoría fue el inglés Henry Briggs (1561-1631), creador de los logaritmos decimales o vulgares, quien fue capaz de calcular los logaritmos de más de 30.000 números con 14 decimales, desde luego sin calculadoras de ningún tipo.

Esa coincidencia temporal refleja que existía la necesidad de disponer de una herramienta de cálculo para simplificar tediosas operaciones, sobre todo astronómicas. Hoy día nos preguntamos de qué manera se podían construir aquellas primitivas tablas de logaritmos, pero la contestación no es tan difícil. Veremos que con poco más que las reglas elementales de la aritmética es ya posible hacerlo.

Otra cuestión interesante es de qué modo algunas denominaciones se conservan a lo largo de la historia y las utilizamos sin darnos cuenta de su significado, y mucho menos de su posible origen. Desde el punto de vista didáctico esto no carece de importancia, pues el uso de ciertas palabras de forma indiscriminada e inmotivada hace un flaco favor a la claridad y precisión en la transmisión de los conocimientos matemáticos. Comenzaremos con este último extremo.

2 La jerga matemática

Como en todas las ciencias y profesiones, también existe una jerga matemática. No nos referimos al lenguaje técnico y preciso que es necesario –incluso inevitable– para el intercambio de ideas y la transmisión de conocimientos matemáticos, sino al uso y abuso de ciertas palabras que salpican las explicaciones de los matemáticos y sorprenden a los profanos. Únicamente nos ocuparemos de unas pocas expresiones comunes cuyo significado es poco claro, a veces tanto para quien las oye como para quien las utiliza.

2.1 "Trivial"

Oímos con frecuencia a los matemáticos la expresión *eso es trivial*, y a veces nos sorprende. En el uso corriente tal adjetivo significa que lo dicho es claro, transparente y no necesita explicación alguna. Sin embargo, "trivial" es herencia del sistema universitario medieval, y se refiere a que la comprensión de lo dicho puede obtenerse con habilidades pertenecientes al *Trivium*, una primera etapa educativa compuesta de tres disciplinas: Gramática, Retórica y Dialéctica. Notemos, pues, que nos señala en su origen la posesión de ciertas habilidades y capacidades para alcanzar el convencimiento en una argumentación: No es, por tanto, sinónimo de inmediato o evidente. El verdadero sentido actual entre matemáticos va más en la línea original: Más bien quiere decir que, entre colegas de la misma o parecida especialidad, o es en efecto claro, o como máximo necesita un momento de reflexión –usando los elementos del *Trivium*– que se concreta, poco después, en un triunfal ¡evidentemente! También se usa "obvio" con igual intención.

El abuso de esta muletilla conlleva el riesgo de pensar que todos los oyentes son capaces de captar la obviedad, cosa que sólo se consigue con una cierta experiencia. Por suerte, también encontramos a veces mentes bien preparadas que "ven" con facilidad, lo que hace fluir suavemente el discurso matemático. "Elemental" y "evidente" suelen usarse como sinónimos de trivial y obvio, aunque son menos elegantes y más utilizados en el lenguaje hablado que en el escrito.

2.2 "Canónico"

He aquí una de las estrellas de la jerga matemática. Su sonido nos trae recuerdos eclesiásticos y musicales, y por ahí podemos encontrar su verdadero significado, que nos remite a las ideas de invariancia y perpetuidad.

En Matemáticas, algo es canónico cuando no depende de la representación concreta elegida para manejar el concepto u objeto de que se trate. En particular –pensemos en Algebra Lineal– es muy útil para denominar propiedades invariantes por cambios de coordenadas: Por ejemplo, la identificación entre un espacio vectorial de dimensión finita y su bidual es canónica. En fórmulas, si $v \in E$, el elemento correspondiente $v^{**} \in E^{**}$ es aquél que, para toda forma lineal $\omega \in E^*$, satisface $\omega(v) = v^{**}(\omega)$. Trivial ¿o no?

Posiblemente, el uso/abuso más conocido de "canónico" en las Matemáticas Elementales sea éste: *Supongamos k vectores escritos con respecto a la base canónica...* Aquí nuestro vocablo, aunque tiene el significado antes dicho, sólo sirve para complicar las cosas. Si $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es una base cualquiera de un espacio vectorial, escribiendo las coordenadas de esos vectores respecto de sí mismos, se tiene que, para todo $i = 1, 2, ..., n$, es $v_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, ..., \delta_{in})$, o sea ¡cualquier base es canónica! Por tanto, lo mismo se podría haber dicho: *Elijamos una base cualquiera y sean k vectores escritos respecto de ella...*

2.3 "Natural"

Otra estrella, que por desgracia se confunde muchas veces con canónico. Por extraña casualidad, en Matemáticas el significado de "natural" es el que naturalmente se nos ocurre: Decir de algo que es natural nos indica que se infiere de manera simple –natural– del devenir del razonamiento.

Volvamos al Algebra Lineal para poner un ejemplo, relacionado con el que empleamos para canónico: El isomorfismo entre un espacio vectorial de dimensión finita E y su dual E^* *es natural* (se nos ocurre establecerlo fijando una base de E y calculando después la base dual en E^*) *pero no es canónico* pues sólo lo podemos construir así: A través de una base.

3 Una pregunta inquietante: ¿Por qué e?

No resultará exagerado si decimos que la primera vez que un estudiante de Matemáticas se cruza con el apelativo “natural” es con relación a los logaritmos naturales o neperianos. Sí lo sería, por el contrario, suponer que nuestro estudiante considerase natural , a primera vista, la expresión $e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ como base del sistema de logaritmos. A poca curiosidad que tenga, alguna vez se habrá preguntado por la naturalidad de tan enrevesada elección; también es probable que nadie se lo haya explicado nunca. A nuestro entender, la presentación de los logaritmos –en cualquier base– en la enseñanza elemental es irracional. Parece intuitivo que si $10 = 10^1$ y $100 = 10^2$, entonces $50 = 10^p$ para algún p entre 1 y 2. Sin embargo, la inocente cuestión, no ya de hallar p, sino de planterse cómo elevar 10 a digamos $1,34567$, deja muy malparada la forma habitual de introducir los logaritmos. Si, además, elegimos una base tan peculiar como el número e, la situación se vuelve bastante complicada. Por eso creemos que vale la pena intentar una justificación.

3.1 ¿Qué es un sistema de logaritmos?

La función real, de variable real positiva, $x \to f(x) = \log x$ es, salvo una constante, la única solución continua [3] de la ecuación funcional $f(xy) = f(x) + f(y)$. De la regla de definición podemos obtener fácilmente algunas propiedades:

- Poniendo $x = y = 1$ queda $f(1) = f(1) + f(1)$, de donde $f(1) = 0$.
- Si $y = \frac{1}{x}$, tenemos $f(xy) = f(1) = 0 = f(x) + f(\frac{1}{x})$, de donde $f(\frac{1}{x}) = -f(x)$.

- Por inducción se comprueba que si $n \in \mathfrak{N}$, entonces $f(x^n) = nf(x)$. Se puede probar que esta regla se extiende también para valores no naturales del exponente.

TEOREMA: "*La función* log*, solución de la ecuación funcional anterior, transforma progresiones geométricas en progresiones ariméticas*"

En efecto: Dada una sucesión de números en progresión geométrica de razón positiva r (elegimos $r > 0$ para que los términos sean todos positivos y tenga sentido aplicar el logaitmo)

$$..., r^{-n}, ..., r^{-2}, r^{-1}, 1, r, r^2, ..., r^n, ...$$

apliquemos la función logaritmo término a término, escribiendo $\log r = d$. Esta d es arbitraria (en esencia es la constante que aparece citada al definir el logaritmo) y por comodidad la tomamos positiva. Obtendremos, usando las propiedades que acabamos de mostrar, la progresión aritmética

$$..., -nd, ..., -2d, -d, 0, d, 2d, ..., nd, ...$$

con diferencia $d = \log r$. Observamos que este teorema es un resultado canónico: Es válido aunque no sepamos ni siquiera cómo calcular los logaritmos.

Históricamente, este teorema se usó como definición de los logaritmos [1, 6, 7]:

"*Un sistema de logaritmos está constituido por un par de progresiones, una de ellas geométrica y la otra aritmética. Los elementos de la progresión aritmética se llaman 'logaritmos' de los términos de la progresión geométrica*".

Vemos claramente cuál es el objeto de la construcción de estos sistemas o Tablas: Operaciones como el producto y la división de términos de la progresión geométrica se transforman en la suma y la diferencia de sus correspondientes logaritmos, hecho del que pueden resultar notables ventajas en las aplicaciones a cálculos complicados.

3.2 Construimos una tabla "natural" de logaritmos

Vamos a comenzar a construir explícitamente la solución de la ecuación funcional. El cálculo con logaritmos sólo resultará práctico si, en nuestra pareja de progresiones, la geométrica está formada por números próximos entre sí. Por otra parte, el logaritmo d de la razón r se puede elegir arbitrariamente –este grado de libertad, que ya hemos comentado, está relacionado con el concepto de base que veremos algo más adelante–, pero también conviene que no sea demasiado grande. Así pues, para conseguir que la progresión geométrica crezca lentamente, elegiremos $r = 1 + c$, con $|c| << 1$. No hay inconveniente en que $c < 0$ –de hecho los cálculos originales de Napier eran así–, pero para que los logaritmos crezcan en el mismosentido que los números es más cómodo que $c > 0$. Si, además, queremos que los cálculos no involucren números muy grandes, deberemos elegir la diferencia $d = \log r = \log(1 + c)$ de modo que sea también pequeña. Como el valor de d es arbitrario, se nos ocurre *naturalmente* hacer $d = c$, y así sólo manejamos un parámetro. Nuestra tabla de logaritmos será:

NUMERO	LOGARITMO
...	...
$(1+c)^{-1}$	$-c$
1	0
$1+c$	c
$(1+c)^2$	$2c$
...	...

De esta manera tenemos construida la función logaritmo para un conjunto numerable y discreto de valores reales positivos. Aunque las necesidades computacionales no nos lo exigen, un matemático que se precie no quedará tranquilo hasta haber extendido esta definición a la semirrecta real positiva.

Notemos también que en la construcción de la tabla de logaritmos sólo intervienen dos operaciones aritméticas bien conocidas: El producto y la suma. Ello desvela, de manera un tanto decepcionante, uno de los "misterios" de las Matemáticas Elementales: ¿Cómo se hicieron las tablas de logaritmos?

3.3 Mejoramos la tabla de logaritmos

Como ya hemos dicho, la tabla puede no ser lo bastante densa para nuestros propósitos calculísticos. También ese problema tiene remedio si recurrimos a la interpolación de términos en las respectivas progresiones.

Sean g y $gr > g$ dos términos consecutivos de la progresión geométrica. Interpolar n términos entre ambos es hallar n números $g_1, g_2, ..., g_n$ tales que

$g < g_1 < g_2 < ... < g_n < gr$, y de modo que los $n+2$ números se hallen en progresión geométrica. Usando la definición de progresión geométrica, bastará tomar como razón de la nueva progresión $r' = \sqrt[n+1]{r}$.

Análogamente, sean a y $a+d > a$ dos términos consecutivos de la progresión aritmética. Interpolar n términos entre ambos será hallar n elementos $a_1, a_2, ..., a_n$ tales que $a < a_1 < a_2 < ... < a_n < a+d$, y de modo que los $n+2$ números se hallen en progresión aritmética. De la definición de progresión aritmética se sigue que hemos de tomar como diferencia para la nueva progresión $d' = \frac{d}{n+1}$. Si $a = \log g$ y $a+d = \log gr$, el proceso de interpolación ha generado una tabla con menores intervalos entre sus constituyentes, y se deduce que se puede hacer tan densa como deseemos recurriendo a interpolar tantas veces como haga falta. Notemos que si los elementos de la progresión geométrica están ya bastante próximos entre sí, la interpolación de un único elemento puede bastar para calcular con bastante precisión. Interpolar un sólo elemento es equivalente al cálculo de una simple raíz cuadrada, y hallar la raíz cuadrada de un número muy próximo á 1, tal como $1+d$, se reduce a modificar la última cifra, así que las operaiones para finar la tabla siguen siendo elementales.

Es interesante observar que, desde el punto de vista de posibles cálculos, sólo necesitaremos interpolar en aquellos tramos de valores donde vayamos a trabajar. Así pues, para interpolar n números entre cada par de elementos de la progresión geométrica y hallar sus logaritmos, tomaremos como razón y diferencia de las nuevas progresiones los números $r_n = \sqrt[n+1]{1+c} = 1+c_n$ y $d_n = \frac{c}{n+1}$. Es claro que ahora no será cierto que $c_n = d_n$.

Todavía no hemos conseguido extender la definición de logaritmo a la totalidad de la semirrecta positiva, pero podemos aventurar una contestación a la pregunta que da título a este trabajo, y que nos conducirá a la deseada extensión.

4 ¿Por qué son *naturales* los logaritmos neperianos?

Recordemos las dos ideas que hemos visto más arriba: Hacer iguales las cantidades que definen las progresiones, c y d, y considerar la interpolación. Además, para reencontrar la presentación habitual, deberemos incorporar el concepto de *base del sistema de logaritmos*. Con estos tres elementos podremos construir una respuesta a la pregunta inquietante.

"*La base* $\mathfrak{B}$ *del sistema de logaritmos definido por una pareja de progresiones es aquel número cuyo logaritmo es* 1".

Veamos, pues, que la base depende de la razón r y de la diferencia d, y comprobaremos que la elección $c = d$ nos hará aparecer una base "natural". En un trabajo anterior de uno de los autores [4] se presentaba este mismo razonamiento con menor detalle y algunos que otros errores de tipografía y de cálculo. Supongamos que partimos de nuestro par original de progresiones, con $c = d$, y que en la progresión aritmética encontramos el número 1, para lo cual basta que elijamos para c un número racional cuya representación irreducible tenga numerador 1. En ese caso, existe un elemento $(1+c)^n$ en la progresión geométrica tal que su logaritmo es $nc = 1$, ó $c = \frac{1}{n}$, y obtenemos para la base la siguiente expresión, que sin duda nos resulta bastante familiar:

$$\mathfrak{B}_n = (1 + \frac{1}{n})^n$$

Tomando n lo bastante grande obtenemos algunos casos simples: $n = 100$ nos da la base $\mathfrak{B}_{100} = (1 + \frac{1}{100})^{100} = 2,7048...$, y con $n = 1000$ tendremos $\mathfrak{B}_{1000} = (1+\frac{1}{1000})^{1000} = 2,7169...$, que coincide con el número e, que definiremos un poco más abajo, en las tres primeras cifras. Recordemos que la introducción de la notación e se debe a Leonhard Euler (1707-1783). El número e es irracional y trascendente y sus primeras cifras son, como es bien sabido, $2,71828...$

Si el número 1 no aparece en nuestra progresión aritmética, lo que ocurre si la elección para c es un número racional no reducible a otro con numerador 1, o bien un irracional, existirá algún n tal que:

$$nc < 1 < (n+1)c, \text{ de donde } (1+c)^n < \mathfrak{B} < (1+c)^{n+1}$$

De la primera cadena de desigualdades obtenemos $\frac{1}{n} > c > \frac{1}{n+1}$, que nos proporciona en la segunda la relación

$$(1 + \frac{1}{n+1})^n < \mathfrak{B} < (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$$

La expresión anterior se puede escribir también como

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n}}(1 + \frac{1}{n+1})^{n+1} < \frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}\mathfrak{B} < (1+\frac{1}{n})^n(1+\frac{1}{n+1})$$

Ahora, tomemos límites para $n \to \infty$ –lo cual equivale a interpolar cada vez más términos– . La observación interesante aquí es que en la k-sima etapa de interpolación habremos construido sendos valores c_k y d_k que, aunque evidentemente no son iguales, satisfacen $c_k \to 0$ (esto es, $1+c_k \to 1$) y $d_k \to 0$. Si consideramos el límite $\lim_{k\to\infty} \frac{c_k}{d_k}$, denominado clásicamente "módulo" del sistema de logaritmos, y hacemos la elección natural, imponer que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{c_k}{d_k} = 1$$

llegamos a la base "más natural posible":

$$\mathfrak{B}_\infty = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$$

La costumbre es utilizar el nombre de la base para denominar el sistema de logaritmos: Los más usados son los decimales o vulgares de base 10, los binarios de base 2,...y los de base e, que son precisamente los más naturales.

Combinando este proceso con la aproximación de un irracional por pares de sucesiones monótonas convergentes logramos extender la definición de logaritmo a todo número real positivo, lo cual completa nuestra tarea. Pueden verse los detalles técnicos, por ejemplo en [3, 5].

5 Más "naturalidad" de los logaritmos neperianos

En la actualidad, las aplicaciones de las Matemáticas nos animan a presentar frecuentemente el número e y los logaritmos neperianos a partir de la resolución de la ecuación diferencial lineal $x' = x$ (no se pierde generalidad por estudiar $x' = x$ en lugar de $x' = kx$, basta un cambio de escala). Esta ecuación se conoce a veces como "crecimiento malthusiano" en recuerdo del economista inglés Thomas Malthus (1766-1834), quien hizo predicciones poco halagüeñas para el futuro de la humanidad y los recursos naturales basándose en ese modelo de crecimiento. Podemos también ver naturalidad en esta aproximación: Supongamos el problema de Cauchy

$$\begin{aligned} x' &= x \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

para nuestra ecuación lineal, y resolvámoslo numéricamente utilizando el método más simple posible, el de Euler: Escribiendo la aproximación de la derivada en diferencias finitas progresivas tendremos

$$\frac{x(t+h)-x(t)}{h} \approx x(t)$$

y el cambio de notación $x(t) = x_n$, $x(t+h) = x_{n+1}$ nos da el algoritmo

$$x_{n+1} = (1+h)x_n$$

Obtenemos así, a partir de la condición inicial, una progresión geométrica de primer término x_0 y razón $r = 1+h$, y a partir de ella construiremos un par de progresiones que ya nos resulta familiar:

$$\begin{array}{l} 1, r, r^2, ..., r^n, ... \\ 0, h, 2h, ..., nh, ... \end{array}$$

Sabemos que globalmente el método de Euler es de primer orden (ver por ejemplo [2] , Cap.16), luego haciendo $h \to 0$, que equivale al proceso de interpolación usado antes, obtendremos de nuevo los logaritmos neperianos de otra manera también natural.

6 Conclusión

La evolución de las Matemáticas ha dejado atrás muchos cálculos, algoritmos, razonamientos, teoremas y resultados, de los que nos quedan únicamente algunos recuerdos en forma de nombres extravagantes o complicados, que nos dicen poco o nada de su origen. Algo de curiosidad no suele estorbar y puede dar lugar a interesantes discusiones y divertidas exploraciones en la trastienda de las Matemáticas.

Pueden verse deliciosas explicaciones en textos antiguos, por ejemplo los Éléments de Bourdon [1], Cap.8-II, muy usados y traducidos en España a lo largo del Siglo XIX, o el Traité de Serret [6], Cap. 5. También se encuentran exposiciones similares en viejos textos de Bachillerato –muy anteriores a las continuas reformas que padecemos– y una buena recensión histórica en el libro de Toeplitz [7]. En este último libro podemos ver la construcción de una tabla de logaritmos al estilo de las de Bürgi.

References

[1] Bourdon Ch (1827: 5^aedición) Éléments d'Arithmétique, Bachelier (Suc. de Mme. Vve. Courcier) París.

[2] Demidovich B, Maron I (1973) Computational Mathematics, Editorial Mir, Moscú.

[3] Dieudonné J (1960) Foundations of Modern Analysis, Academic Press, London.

[4] Pacheco J (1978) Algunas reflexiones sobre un tema de Bachillerato: Introducción del logaritmo y del número e. *Revista de Bachillerato*, 7, pp. 49-51.

[5] Rothe R (1957) Matemática Superior (Vol. 1: Elementos), Editorial Labor, Barcelona.

[6] Serret J (1852) Traité D'Arithmétique, Bachelier Imprimeur-Libraire, París.

[7] Toeplitz O (1949) Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung, Springer Verlag, Berlín.